

УДК 621.9.06

І.А. Валявський, ас., І.І. Павленко, проф., д-р техн. наук

Кіровоградський національний технічний університет

## Теоретичне дослідження особливих положень верстатів-гексаподів

В статті теоретично досліджені особливі положення верстатів-гексаподів та запропоновані рекомендації щодо їх уникнення.

**верстат, гексапод, особливі положення, матриця Якобі**

Концепція розвитку багатомоделового виробництва конкурентоспроможної машинобудівної продукції в умовах жорсткої боротьби за ринки збуту вимагає широкого використання високоефективних нових технологій та створення для їх реалізації гнучких автоматизованих верстатних систем.

Одним з напрямків автоматизації гнучких виробничих систем є створення технологічного обладнання з паралельною кінематикою.

Проектування подібного обладнання типу "гексапод" передбачає узгодження взаємозв'язків між схемами формоутворення поверхонь деталей, величиною і напрямками координатних рухів виконавчого органа, компоновочною схемою та конструктивним виконанням елементів верстатної системи.

Механізми типу "гексапод" можуть використовуватись не тільки у верстатобудуванні, а і в інших галузях народного господарства. Наприклад, для з'єднання навісних машин з трактором та ходових коліс транспортного засобу з базовою конструкцією необхідно реалізувати вимоги щодо забезпечення декількох ступенів вільності механізму з метою усунення або зменшення навантажень та вібрацій, що забезпечується застосуванням механізмів паралельної структури (рис. 1).

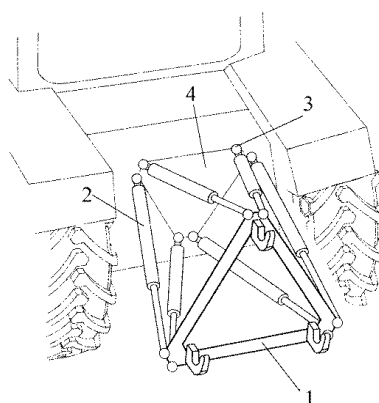


Рисунок 1 – Пристрій для з'єднання навісного обладнання з трактором

Механізм складається з виконавчого органу 1, шести кінематичних ланок 2, кожна з яких має лінійний привід для зміни довжини, що з'єднують виконавчий орган через опорні шарніри 3 з нерухомим елементом 4, закріпленим на відповідному транспортному засобі. Зміна положення виконавчого органу залежно від умов переміщення транспортного засобу здійснюється шляхом зміни довжини кожної кінематичної ланки по відповідному закону.

Під час функціонування гексаподів кінематичні ланки та виконавчий орган можуть створювати особливу конфігурацію, яка викликає втрату однієї або декількох ступенів вільності, аналогічно явищу "мертвої точки" для традиційних механізмів [1, 3], що негативно впливає на працездатність верстатів.

Слід відмітити, що гексаподи у особливому положенні, втрачаючи визначені ступені вільності, продовжують функціонувати, але для виходу з цього положення слід витратити значно більші зусилля, що одночасно створює складності керування процесом обробки деталей.

Отже, визначення особливих положень конфігурації кінематичних ланок та виконавчого органа верстатів-гексаподів, а також пошук шляхів виходу з них є актуальною задачею.

З метою визначення особливих положень верстата-гексапода розглянемо матрицю Якобі [3], складену з рівнянь зв'язку

$$J = \left| \frac{dF_i}{dx_j} \right|, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n,$$

де  $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – рівняння зв'язку.

Положення ВО верстата-гексапода, при яких ранг матриці Якобі менше шести ( $J=0$ ), будуть його особливими положеннями.

Система рівнянь для верстата-гексапода складається з 18 рівнянь, які зв'язують координати опорних шарнірів, розташованих на виконавчому органі та несучій системі. На рис. 2 наведено положення ВО у власній (рухомій) системі координат  $X_{BO}Y_{BO}Z_{BO}$ , яка розташована у системі координат верстата  $X_H, Y_H$  та  $Z_H$ .

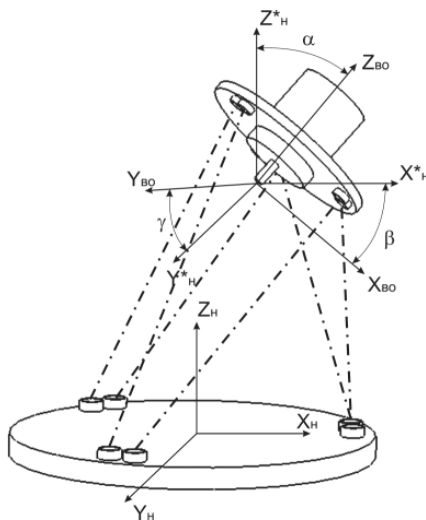


Рисунок 2 – Системи координат ВО ( $X_{BO}, Y_{BO}, Z_{BO}$ ) і верстата ( $X_H, Y_H, Z_H$ )

$$\begin{aligned} (x_{a(n)} - x_{A(n)})^2 + (y_{a(n)} - y_{A(n)})^2 + (z_{a(n)} - z_{A(n)})^2 - l_{aA}^2 &= 0; \\ (x_{b(n)} - x_{B(n)})^2 + (y_{b(n)} - y_{B(n)})^2 + (z_{b(n)} - z_{B(n)})^2 - l_{bB}^2 &= 0; \\ (x_{c(n)} - x_{C(n)})^2 + (y_{c(n)} - y_{C(n)})^2 + (z_{c(n)} - z_{C(n)})^2 - l_{cC}^2 &= 0; \\ (x_{d(n)} - x_{D(n)})^2 + (y_{d(n)} - y_{D(n)})^2 + (z_{d(n)} - z_{D(n)})^2 - l_{dD}^2 &= 0; \\ (x_{e(n)} - x_{E(n)})^2 + (y_{e(n)} - y_{E(n)})^2 + (z_{e(n)} - z_{E(n)})^2 - l_{eE}^2 &= 0; \\ (x_{f(n)} - x_{F(n)})^2 + (y_{f(n)} - y_{F(n)})^2 + (z_{f(n)} - z_{F(n)})^2 - l_{fF}^2 &= 0; \\ (x_{a(n)} - x_{b(n)})^2 + (y_{a(n)} - y_{b(n)})^2 + (z_{a(n)} - z_{b(n)})^2 - d_{ab}^2 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x_{a(n)} - x_{c(n)})^2 + (y_{a(n)} - y_{c(n)})^2 + (z_{a(n)} - z_{c(n)})^2 - d_{ac}^2 = 0; \\
&(x_{b(n)} - x_{c(n)})^2 + (y_{b(n)} - y_{c(n)})^2 + (z_{b(n)} - z_{c(n)})^2 - d_{bc}^2 = 0; \\
&(x_{c(n)} - x_{d(n)})^2 + (y_{c(n)} - y_{d(n)})^2 + (z_{c(n)} - z_{d(n)})^2 - d_{cd}^2 = 0; \\
&(x_{a(n)} - x_{d(n)})^2 + (y_{a(n)} - y_{d(n)})^2 + (z_{a(n)} - z_{d(n)})^2 - d_{ad}^2 = 0; \\
&(x_{b(n)} - x_{d(n)})^2 + (y_{b(n)} - y_{d(n)})^2 + (z_{b(n)} - z_{d(n)})^2 - d_{bd}^2 = 0; \\
&(x_{d(n)} - x_{e(n)})^2 + (y_{d(n)} - y_{e(n)})^2 + (z_{d(n)} - z_{e(n)})^2 - d_{de}^2 = 0; \\
&(x_{a(n)} - x_{e(n)})^2 + (y_{a(n)} - y_{e(n)})^2 + (z_{a(n)} - z_{e(n)})^2 - d_{ae}^2 = 0; \\
&(x_{b(n)} - x_{e(n)})^2 + (y_{b(n)} - y_{e(n)})^2 + (z_{b(n)} - z_{e(n)})^2 - d_{be}^2 = 0; \\
&(x_{e(n)} - x_{f(n)})^2 + (y_{e(n)} - y_{f(n)})^2 + (z_{e(n)} - z_{f(n)})^2 - d_{ef}^2 = 0; \\
&(x_{a(n)} - x_{f(n)})^2 + (y_{a(n)} - y_{f(n)})^2 + (z_{a(n)} - z_{f(n)})^2 - d_{af}^2 = 0; \\
&(x_{b(n)} - x_{f(n)})^2 + (y_{b(n)} - y_{f(n)})^2 + (z_{b(n)} - z_{f(n)})^2 - d_{bf}^2 = 0,
\end{aligned}$$

де  $(x_{a(n)}, y_{a(n)}, z_{a(n)}), (x_{b(n)}, y_{b(n)}, z_{b(n)}), \dots, (x_{f(n)}, y_{f(n)}, z_{f(n)})$  – координати опорних шарнірів виконавчого органа в нерухомій системі координат верстата;

$(x_{A(n)}, y_{A(n)}, z_{A(n)}), (x_{B(n)}, y_{B(n)}, z_{B(n)}), \dots, (x_{F(n)}, y_{F(n)}, z_{F(n)})$  – координати опорних шарнірів несучої системи в нерухомій системі координат;

$l_{aA}, l_{bB}, l_{cC}, l_{dD}, l_{eE}, l_{fF}$  – відстані між відповідними опорними шарнірами, що визначають довжини кінематичних ланок;

$d_{ab}, d_{ac}, d_{bc}, d_{cd}, d_{ad}, d_{bd}, d_{de}, d_{ae}, d_{be}, d_{ef}, d_{af}, d_{bf}$  – відстані між опорними шарнірами виконавчого органа

$$\begin{aligned}
d_{ab}^2 &= (x_{a(p)} - x_{b(p)})^2 + (y_{a(p)} - y_{b(p)})^2 + (z_{a(p)} - z_{b(p)})^2; \\
d_{ac}^2 &= (x_{a(p)} - x_{c(p)})^2 + (y_{a(p)} - y_{c(p)})^2 + (z_{a(p)} - z_{c(p)})^2; \\
d_{bc}^2 &= (x_{b(p)} - x_{c(p)})^2 + (y_{b(p)} - y_{c(p)})^2 + (z_{b(p)} - z_{c(p)})^2; \\
d_{cd}^2 &= (x_{c(p)} - x_{d(p)})^2 + (y_{c(p)} - y_{d(p)})^2 + (z_{c(p)} - z_{d(p)})^2; \\
d_{ad}^2 &= (x_{a(p)} - x_{d(p)})^2 + (y_{a(p)} - y_{d(p)})^2 + (z_{a(p)} - z_{d(p)})^2; \\
d_{bd}^2 &= (x_{b(p)} - x_{d(p)})^2 + (y_{b(p)} - y_{d(p)})^2 + (z_{b(p)} - z_{d(p)})^2; \\
d_{de}^2 &= (x_{d(p)} - x_{e(p)})^2 + (y_{d(p)} - y_{e(p)})^2 + (z_{d(p)} - z_{e(p)})^2; \\
d_{ae}^2 &= (x_{a(p)} - x_{e(p)})^2 + (y_{a(p)} - y_{e(p)})^2 + (z_{a(p)} - z_{e(p)})^2; \\
d_{be}^2 &= (x_{b(p)} - x_{e(p)})^2 + (y_{b(p)} - y_{e(p)})^2 + (z_{b(p)} - z_{e(p)})^2; \\
d_{ef}^2 &= (x_{e(p)} - x_{f(p)})^2 + (y_{e(p)} - y_{f(p)})^2 + (z_{e(p)} - z_{f(p)})^2; \\
d_{af}^2 &= (x_{a(p)} - x_{f(p)})^2 + (y_{a(p)} - y_{f(p)})^2 + (z_{a(p)} - z_{f(p)})^2; \\
d_{bf}^2 &= (x_{b(p)} - x_{f(p)})^2 + (y_{b(p)} - y_{f(p)})^2 + (z_{b(p)} - z_{f(p)})^2,
\end{aligned}$$

де  $(x_{a(p)}, y_{a(p)}, z_{a(p)}), (x_{b(p)}, y_{b(p)}, z_{b(p)}), \dots, (x_{f(p)}, y_{f(p)}, z_{f(p)})$  – координати опорних шарнірів виконавчого органа в рухомій системі координат виконавчого органа.

Складемо матрицю Якобі, диференціюючи наведені рівняння зв'язку послідовно за змінними  $x_{a(n)}, y_{a(n)}, z_{a(n)}, x_{b(n)}, y_{b(n)}, z_{b(n)}, \dots, x_{f(n)}, y_{f(n)}, z_{f(n)}$

$$J = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & k_5 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 & k_8 & k_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13} & k_{14} & k_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{19} & k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{25} & k_{26} & k_{27} & 0 & 0 & 0 & k_{28} & k_{29} & k_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{37} & k_{38} & k_{39} & k_{40} & k_{41} & k_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{43} & k_{44} & k_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{46} & k_{47} & k_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{49} & k_{50} & k_{51} & 0 & 0 & 0 & k_{52} & k_{53} & k_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} & k_{60} & 0 & 0 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{67} & k_{68} & k_{69} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{70} & k_{71} & k_{72} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{79} & k_{80} & k_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{82} & k_{83} & k_{84} \\ 0 & 0 & 0 & k_{85} & k_{86} & k_{87} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{88} & k_{89} & k_{90} \end{vmatrix}$$

Коефіцієнти  $k_1 - k_{90}$  визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2(x_{a(n)} - x_{A(n)}); & k_2 &= 2(y_{a(n)} - y_{A(n)}); & k_3 &= 2(z_{a(n)} - z_{A(n)}); \\ k_4 &= 2(x_{b(n)} - x_{B(n)}); & k_5 &= 2(y_{b(n)} - y_{B(n)}); & k_6 &= 2(z_{b(n)} - z_{B(n)}); \\ k_{85} &= 2(x_{b(n)} - x_{f(n)}); & k_{86} &= 2(y_{b(n)} - y_{f(n)}); & k_{87} &= 2(z_{b(n)} - z_{f(n)}); \\ k_{88} &= 2(x_{f(n)} - x_{b(n)}); & k_{89} &= 2(y_{f(n)} - y_{b(n)}); & k_{90} &= 2(z_{f(n)} - z_{b(n)}). \end{aligned}$$

Розклавши якобіан по трьом останнім стовбцям за теоремою Лапласа, отримаємо

$$J = M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3,$$

де  $M_1, M_2, M_3$  – мінори;

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{vmatrix} k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{82} & k_{83} & k_{84} \\ k_{88} & k_{89} & k_{90} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x_{f(n)} - x_{e(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{e(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{e(n)}) \\ 2(x_{f(n)} - x_{a(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{a(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{a(n)}) \\ 2(x_{f(n)} - x_{b(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{b(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{b(n)}) \end{vmatrix} \\ M_2 &= \begin{vmatrix} k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{82} & k_{83} & k_{84} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x_{f(n)} - x_{F(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{F(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{F(n)}) \\ 2(x_{f(n)} - x_{e(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{e(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{e(n)}) \\ 2(x_{f(n)} - x_{a(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{a(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{a(n)}) \end{vmatrix} \\ M_3 &= \begin{vmatrix} k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{88} & k_{89} & k_{90} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x_{f(n)} - x_{F(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{F(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{F(n)}) \\ 2(x_{f(n)} - x_{e(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{e(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{e(n)}) \\ 2(x_{f(n)} - x_{b(n)}) & 2(y_{f(n)} - y_{b(n)}) & 2(z_{f(n)} - z_{b(n)}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$D_1, D_2, D_3$  – алгебраїчні доповнення відповідних мінорів.

Якобїан дорівнює нулю при рівності нулю мінорів  $M_1, M_2, M_3$ , що означає, що опорні шарніри  $F, a, b, e, f$  знаходяться в одній площині.

Розкладаючи якобїан по стовбцям 13, 14, 15, одержимо

$$J = M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3 + M_4 D_4 + M_5 D_5 + M_6 D_6,$$

де  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  – мінори.

Якобїан буде дорівнювати нулю при рівності нулю наведених мінорів, що відповідає знаходженню точок  $D, a, b, c, e, d$  в одній площині.

Аналогічним чином розкладаючи якобїан по іншим стовбцям можна зробити висновок, що верстат-гексапод буде знаходитись в особливому положенні, коли хоча б одна з кінематичних ланок і виконавчий орган знаходяться в одній площині (рис. 3).

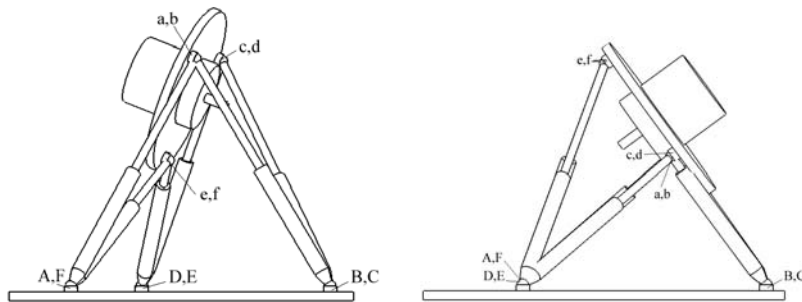


Рисунок 3 – Приклади особливих положень верстата-гексапода

Проведені теоретичні дослідження особливих положень верстата-гексапода дозволяють запропонувати наступні рекомендації:

- необхідно уникати паралельності трьох і більше кінематичних ланок;
- не допускається розташування на одній прямій більше двох опорних шарнірів;
- необхідно уникати розташування усіх кінематичних ланок у двох площинах;
- не допускається перетин в одній точці більше трьох кінематичних ланок;
- слід уникати розташування в одній площині більше трьох кінематичних ланок.

Недотримання наведених рекомендацій може створювати особливі положення компонентів верстата-гексапода, що негативно впливає на його працездатність.

## Список літератури

1. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. - М.:Наука, 1982. – 336 с.
2. Крижанівський В.А., Кузнєцов Ю.М., Валявський І.А., Склярів Р.А. Технологічне обладнання з паралельною кінематикою: Навчальний посібник для ВНЗ. Під ред. Ю.М. Кузнєцова. – Кіровоград, 2004. – 449 с.
3. Лунев В.В., Мисюрин С.Ю. Особые многообразия плоских и пространственных механизмов с несколькими степенями свободы. // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – №1 – С. 102-109.

В статтє теоретически исследованы особые положения станков-гексаподов и предложены рекомендации по их избежанию.

Theory the special positions of hexapods are investigational in the article.